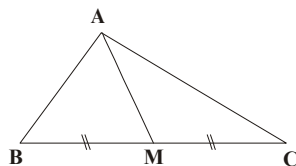


CHUYÊN ĐỀ : SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN,

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

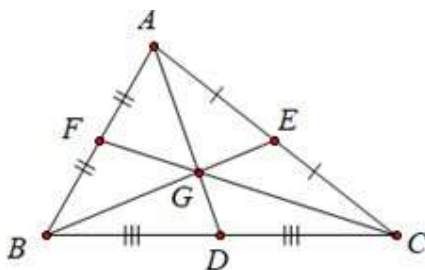
1. Đường trung tuyến của một tam giác



- Đoạn thẳng AM nối đỉnh A của $\triangle ABC$ với trung điểm M của cạnh BC gọi là đường trung tuyến (xuất phát từ đỉnh A hoặc ứng với cạnh BC) của $\triangle ABC$.
- Đường thẳng AM cũng gọi là đường trung tuyến của $\triangle ABC$.
- Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.

2. Tính chất đồng quy của ba đường trung tuyến

Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm (hay đồng quy tại một điểm). Điểm gặp nhau của ba đường trung tuyến gọi là trọng tâm của tam giác đó.



3. Vị trí của trọng tâm:

Trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi

qua đỉnh ấy: $\frac{AG}{AD} = \frac{BG}{BE} = \frac{CG}{CF} = \frac{2}{3}$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác

I. Phương pháp giải:

Sử dụng linh hoạt các tỉ số liên quan đến trọng tâm tam giác.

II. Bài toán.

Bài 1. Chọn câu sai:

- A. Trong một tam giác có ba đường trung tuyến.
- B. Các đường trung tuyến của tam giác cắt tại một điểm.
- C. Giao của ba đường trung tuyến của một tam giác gọi là trọng tâm của tam giác đó.
- D. Một tam giác có hai trọng tâm.

Lời giải

Một tam giác chỉ có một trọng tâm nên D sai.

Chọn đáp án D.

Bài 2. Điền số thích hợp vào chỗ trống: “Trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng ... độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy”

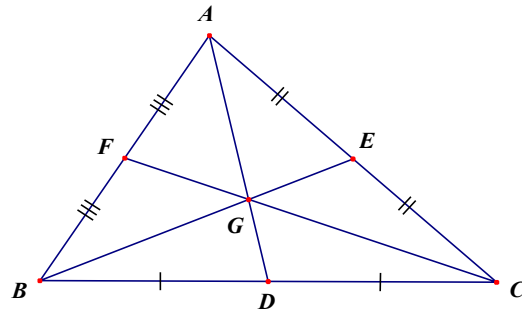
- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn đáp án A.

Theo tính chất trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy. Số cần điền là $\frac{2}{3}$

Bài 3. Cho hình vẽ sau. Tính tỉ số $\frac{BG}{BE}$?

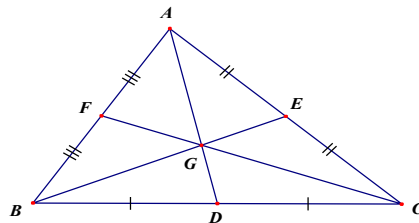


Lời giải

Ta có AD, BE, CF là ba đường trung tuyến của tam giác ABC và chúng cắt nhau tại G nên G là trọng tâm của tam giác ABC .

Theo tính chất ba đường trung tuyến của tam giác ta có $\frac{BG}{BE} = \frac{2}{3} \Rightarrow BG = \frac{2}{3} BE$.

Bài 4. Cho hình vẽ sau. Tính tỉ số $\frac{AG}{GD}$?



Lời giải

Ta có AD, BE, CF là ba đường trung tuyến của tam giác ABC và chúng cắt nhau tại G nên G là trọng tâm của tam giác ABC .

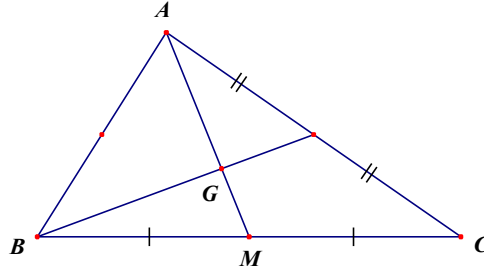
Theo tính chất ba đường trung tuyến của tam giác ta có:

$$\frac{AG}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow AG = \frac{2}{3} AD \Rightarrow GD = AD - AG = AD - \frac{2}{3} AD = \frac{1}{3} AD$$

$$\Rightarrow \frac{AG}{GD} = \frac{\frac{2}{3} AD}{\frac{1}{3} AD} = 2 \Rightarrow AG = 2GD.$$

Bài 5. Tam giác ABC có trung tuyến $AM = 9\text{cm}$ và trọng tâm G . Tính độ dài đoạn AG ?

Lời giải

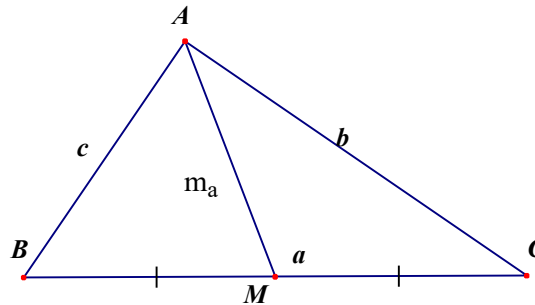


Vì G là trọng tâm của tam giác ABC và AM là đường trung tuyến, nên $AG = \frac{2}{3} AM$ (Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác), do đó: $AG = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6\text{cm}$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Kẻ trung tuyến AM . Đặt $AM = m_a$.

Chứng minh rằng $\frac{b+c-a}{2} < m_a < \frac{b+c}{2}$

Lời giải



Với $\triangle AMB$ ta có: $AM + MB > AB$ (1)

Với $\triangle AMC$ ta có: $AM + MC > AC$ (2)

Cộng từng vế của (1) và (2) ta được: $2AM + (MB + MC) > AB + AC$

Hay $2m_a + a > b + c \Rightarrow m_a > \frac{b+c-a}{2}$

Chứng minh tương tự ta có $m_a < \frac{b+c}{2}$

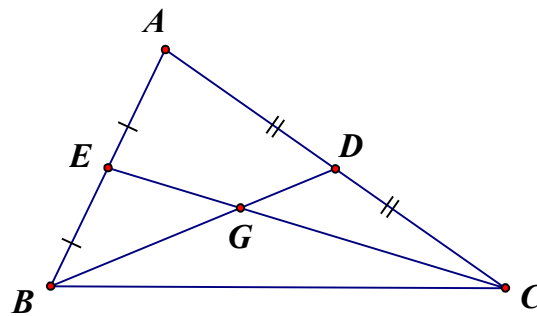
Khi đó ta có: $\frac{b+c-a}{2} < m_a < \frac{b+c}{2}$

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BD, CE

a) Tính các tỉ số $\frac{BG}{BD}, \frac{CG}{CE}$

b) Chứng minh $BD + CE > \frac{3}{2}BC$.

Lời giải



Gọi giao điểm của hai đường trung tuyến BD, CE là G .

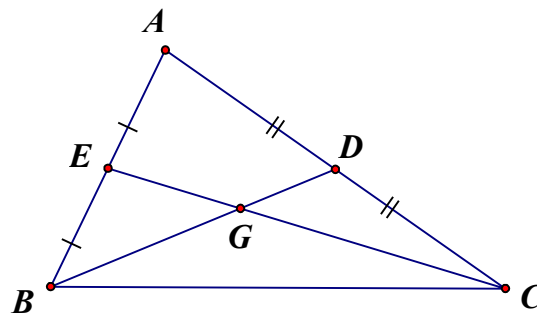
$\triangle GBC$ có: $GB + GC > BC$ (bất đẳng thức tam giác).

Mà $GB = \frac{2}{3}BD$, $GC = \frac{2}{3}CE$ nên: $\frac{2}{3}BD + \frac{2}{3}CE > BC$.

Do đó $BD + CE > \frac{3}{2}BC$.

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có $BC = 8\text{ cm}$, các đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G . Chứng minh $BD + CE > 12\text{ cm}$.

Lời giải



$\triangle GBC$ có: $GB + GC > BC$ (bất đẳng thức tam giác).

Mà $GB = \frac{2}{3}BD$, $GC = \frac{2}{3}CE$ nên: $\frac{2}{3}BD + \frac{2}{3}CE > BC$.

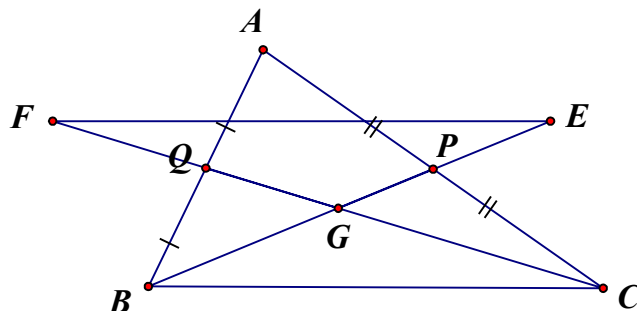
Do đó $BD + CE > \frac{3}{2}BC = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BP, CQ cắt nhau tại G . Trên tia đối của tia $.PB$, lấy điểm E sao cho $PE = PG$. Trên tia đối của tia QG lấy điểm F sao cho $QF = QG$. Chứng minh:

a) $GB = GE, GC = GF$;

b) $EF = BC$ và $EF \parallel BC$.

Lời giải



a) Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $BG = 2GP, CG = 2GQ$.

Lại có $PE = PG, QF = QG$ nên $GE = 2GP, GF = 2GQ$.

Do đó $BG = GE, CG = GF$.

b) Suy ra $\triangle GBC = \triangle GEF$ (c.g.c)

Từ đó ta có $EF = BC$ và $\angle GEF = \angle GBC$

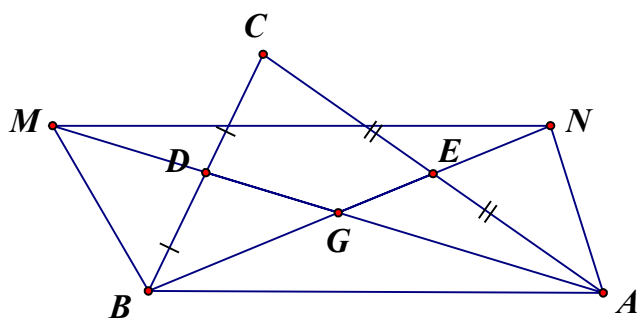
$\Rightarrow EF \parallel BC$.

Bài 10. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến AD, BE cắt nhau tại G . Trên tia đối của tia DG lấy điểm M sao cho D là trung điểm của đoạn thẳng MG . Trên tia đối của tia EG lấy điểm N sao cho E là trung điểm của GN . Chứng minh:

a) $GN = GB, GM = GA$;

b) $AN = MB$ và $AN \parallel MB$.

Lời giải



a) Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $BG = 2GE, AG = 2GD$.

Lại có $GN = 2GE, GM = 2GD$ (D, E lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng MG, GN)

Do đó $GN = GB, GM = GA$;

b) Suy ra $\triangle GBM = \triangle GNA$ (c.g.c)

Từ đó ta có $AN = MB$ và $GMB = GAN$

$\Rightarrow AN \parallel MB$.

Dạng 2. Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

I. Phương pháp giải:

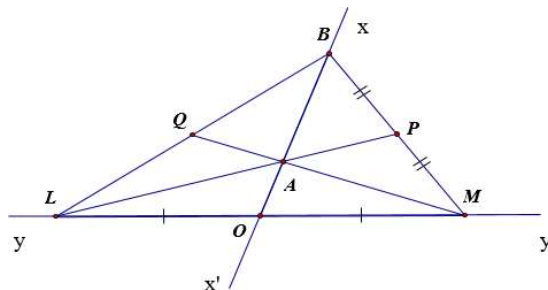
Để chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác, ta có thể dùng một trong hai cách sau:

- + Chứng minh điểm đó là giao điểm của hai đường trung tuyến trong tam giác.
- + Chứng minh điểm đó thuộc một đường trung tuyến của tam giác và thỏa mãn một trong các tỉ lệ về tính chất trọng tâm của tam giác.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau tại O . Trên tia Ox lấy hai điểm A, B sao cho A nằm giữa O và $B, AB = 2OA$. Trên yy' lấy hai điểm L và M sao cho O là trung điểm của LM . Nối B với L, B với M và gọi P là trung điểm của đoạn MB, Q là trung điểm của đoạn LB . Chứng minh rằng các đoạn thẳng LP và MQ đi qua A .

Lời giải



Ta có O là trung điểm của đoạn LM . Suy ra BO là đường trung tuyến của $\triangle BLM$ (1)

Mặt khác $BO = BA + AO$ vì A nằm giữa O và B hay $OB = 2OA + OA = 3OA$

Suy ra $BA = \frac{2}{3}BO$ (2)

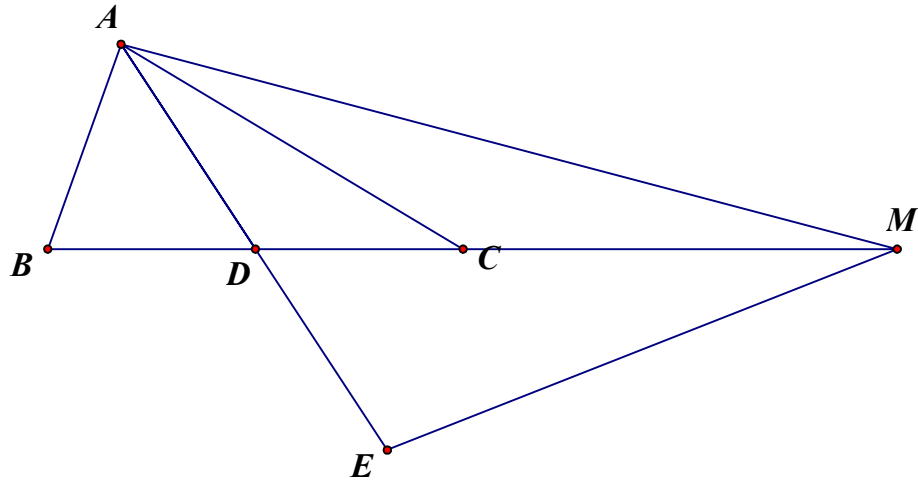
Từ (1), (2) suy ra A là trọng tâm của $\triangle BLM$

Mà LP và MQ là các đường trung tuyến của $\triangle BLM$ (vì P là trung điểm MB và O là trung điểm của đoạn LM)

Suy ra các đoạn thẳng LP và MQ đi qua A (theo tính chất ba đường trung tuyến)

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ với đường trung tuyến AD . Trên tia AD lấy điểm E sao cho $AD = DE$, trên tia BC lấy điểm M sao cho $BC = CM$. Chứng minh C là trọng tâm của $\triangle AEM$.

Lời giải



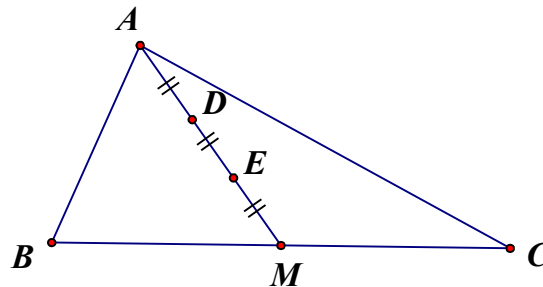
Theo đề bài ta có $AD = DE$ nên C thuộc MD là đường trung tuyến của tam giác AEM (1)

Mặt khác ta có $BC = 2CD$ và $BC = CM$ nên $CM = 2CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra C là trọng tâm của ΔAEM .

Bài 3. Cho ΔABC . Trên đường trung tuyến AM của tam giác đó, lấy hai điểm D, E sao cho $AD = DE = EM$. Chứng minh E là trọng tâm của ΔABC .

Lời giải



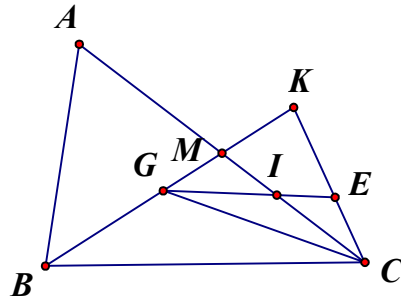
Từ giả thiết $AD = DE = EM$ ta có $AE = \frac{2}{3}AM$.

Mà E thuộc trung tuyến AM nên E là trọng tâm của ΔABC .

Bài 4. Cho ΔABC . Vẽ trung tuyến BM . Trên tia BM lấy hai điểm G, K sao cho $BG = \frac{2}{3}BM$

và G là trung điểm của BK . Gọi E là trung điểm CK ; GE cắt AC tại I . Chứng minh: I là trọng tâm của ΔKGC .

Lời giải



Theo đề bài $BG = \frac{2}{3}BM$. Suy ra $BG = 2GM \Rightarrow GK = 2GM$

$\Rightarrow M$ là trung điểm GK .

Do đó I là giao điểm ba đường trung tuyến trong ΔKGC .

Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều

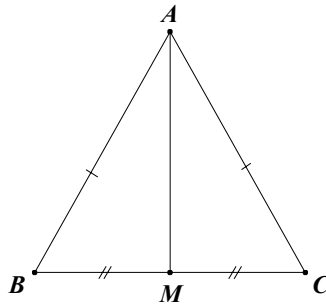
I. Phương pháp giải:

Chú ý những tính chất của tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A , trung tuyến AM . Chứng minh rằng AM vuông góc với BC .

Lời giải



Xét ΔABM và ΔACM có:

$$AB = AC \text{ (GT)}$$

$$BM = CM \text{ (GT)}$$

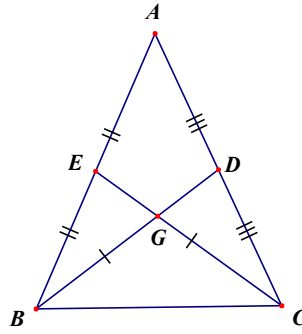
AM : cạnh chung

$$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ACM \text{ (c-c-c)} \Rightarrow \angle AMB = \angle AMC \text{ (Hai góc tương ứng)}$$

Mà $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$ nên $\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$ hay $AM \perp BC$

Bài 2. Cho ΔABC có các đường trung tuyến BD và CE bằng nhau. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác cân.

Lời giải



Gọi G là giao điểm của BD và $CE \Rightarrow BG = \frac{2}{3}BD$; $CG = \frac{2}{3}CE$

Do $BD = CE$ nên $BG = CG$; $GD = GE \Rightarrow \triangle BGE = \triangle CGD$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = CD$

Ta lại có: $BE = \frac{1}{2}AB$; $CD = \frac{1}{2}CA$

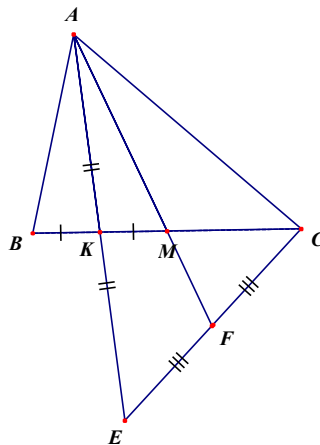
Do đó $AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A

Bài 3. Cho tam giác ABC , đường trung tuyến. Gọi K là trung điểm của BM . Trên tia đối của tia lấy KA điểm E sao cho $KE = KA$.

a) Điểm M là trọng tâm của tam giác nào? Vì sao?

b) Gọi F là trung điểm của CE . Chứng minh rằng ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Lời giải



Xét $\triangle ACE$, ta có: $KA = KE$ (gt) $\Rightarrow CK$ là đường trung tuyến

Mà $CM = \frac{2}{3}CK$ nên M là trọng tâm $\triangle ACE$.

Do F là trung điểm của EC (gt) nên AF là đường trung tuyến thứ ba của $\triangle ACE$

Mà M là trọng tâm nên AF đi qua M

Hay ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , trung tuyến AM . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

a) Tính $\angle ABD$

b) Chứng minh $\triangle ABD = \triangle BAC$.

c) Chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$

Lời giải

a) $\triangle AMC = \triangle DMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle ADB = \angle DAC \Rightarrow BD \parallel AC$ Mà $AB \perp AC$ nên $AB \perp BD$

$\Rightarrow \angle ABD = 90^\circ$.

b) $\triangle ABD = \triangle BAC$ (c.g.c).

c) $\triangle ABD = \triangle BAC$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = BC$.

Mà $AM = \frac{1}{2}AD \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC$